ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Luis Puig

Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Valencia

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Luis Puig
Universitat de València

3.1. LA IDEA FREUDENTHALIANA DE FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA

3.1.1. EL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO COMO COMPONENTE DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico de las matemáticas, esto es, el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos, tiene varios componentes, que organizan varios de los capítulos de este libro. Uno de los componentes toma su nombre de la obra de Hans Freudenthal *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* y es el objeto de este capítulo. Voy pues a desarrollar aquí los rasgos característicos y algunas consecuencias de lo que yo entiendo por análisis fenomenológico de las matemáticas como un componente de su análisis didáctico. Mi exposición se referirá continuamente a la obra de Freudenthal, pero me tomaré algunas libertades con la terminología que él utiliza e introduciré otra que le es ajena.

No puedo pretender desarrollar un análisis fenomenológico pormenorizado de los contenidos matemáticos de la educación secundaria en el espacio de unas pocas páginas, así que me extenderé más en consideraciones de índole general alrededor de dos ideas básicas que para mí son cruciales para entender a dónde puede conducir este análisis —o, al menos, qué sentido le he dado yo. La primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática y, en consecuencia, a la naturaleza de la actividad que hay que dar la oportunidad a los alumnos que realicen para que puedan tener acceso a genuina experiencia matemática; de ella me ocuparé en el siguiente apartado. La segunda es una toma de partido sobre cuáles son los objetivos que hay que perseguir en la enseñanza de las matemáticas para capas amplias de la población, con respecto a la naturaleza de los conocimientos matemáticos que se propone que adquieran, y se cifra en la expresión de Freudenthal *constitución de objetos mentales versus adquisición de conceptos*; esta idea la desarrollaré en el apartado tercero. Finalmente, recorreré los bloques de contenidos del currículo de matemáticas de secundaria, esbozando el sentido en que se ha hecho su análisis fenomenológico o el sentido en que, a mi entender, habría que hacerlo. El lector puede recurrir a los minuciosos análisis que Freudenthal desarrolló en sus libros —aunque a pesar de su volumen tampoco encontrará en ellos cubierto el conjunto de la educación secundaria— o bien usar como ejemplo los textos de Freudenthal traducidos al castellano que se indican en el apéndice y ejercitarse en el análisis fenomenológico.

3.1.2. El análisis fenomenológico

Tanto la exposición de las dos ideas que acabo de indicar como los esbozos de análisis que les seguirán son parte constitutiva de una descripción de en qué consiste un análisis fenomenológico y permiten, por tanto, que se pueda concebir qué es la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas en el sentido de Freudenthal. Si quiero ser coherente con las ideas que voy a exponer, no puedo comenzar por una definición de fenomenología y pretender que esté dado de una vez por todas su concepto. Freudenthal comienza su exposición con un ejemplo y sólo tras él presenta, en el capítulo titulado *El método*, su caracterización. Pero para hacer concebir la fenomenología didáctica yo tengo una ventaja sobre el propio Freudenthal, a saber, puedo comenzar con la propia caracterización que él hace, plantearla como problemática y perseguir que el lector pueda constituir un objeto mental 'fenomenología didáctica' como consecuencia del sentido que él produzca a partir de su lectura de las páginas subsiguientes de este capítulo.

Freudenthal comienza indicando que le ha dado a su método de análisis de los contenidos matemáticos el nombre de 'fenomenología' porque parte de la contraposición establecida en la tradición filosófica entre lo que se expresa en esa tradición con los términos 'fenómeno' y 'noúmeno'. Esa contraposición, cuyo carácter de antítesis pone en duda, la establece en las matemáticas entre los conceptos o estructuras matemáticas, que serían noúmenos y los fenómenos que esos conceptos organizan. Así, por ejemplo, las figuras geométricas como objetos matemáticos organizan un conjunto de fenómenos que globalmente considerados se puede calificar como el mundo de los contornos.

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos. Veremos más adelante que la relación entre fenómenos y conceptos se torna más compleja al intervenir un tercero en la relación, el objeto mental, y que el análisis fenomenológico ha de tomar en consideración también las relaciones entre fenómenos y objeto mental y entre objeto mental y concepto.

3.1.3. Fenomenología sin noúmenos

He mencionado que los términos que dan origen al nombre del método los toma Freudenthal de la tradición filosófica, pero no he indicado qué significan en ella. Un primer motivo para no haberlo hecho es que esos términos tienen una larga historia en la filosofía y su significado varía de un sistema filosófico a otro. Freudenthal es de poca ayuda al respecto ya que apenas va más allá de dar una caracterización negativa: taxativamente afirma que cuando usa el término 'fenomenología' no se refiere al sentido que le dan Hegel, Husserl o Heidegger, pero no acompaña esta negación de una afirmación de adscripción, sintonía o simpatía con otros filósofos. 'Noúmeno' lo identifica con "objeto de pensamiento" sin más explicaciones y respecto a 'fenómeno' sólo dice que consideramos algo como un fenómeno cuando tenemos experiencia de ello. No voy a intentar dilucidar aquí si estas someras indicaciones pueden interpretarse como una filiación kantiana; por un lado, escapa a mi competencia, pero, por otro lado, no me interesa buscar filiaciones sino derivar consecuencias del uso que Freudenthal hace de los términos que adopta cuando los pone en funcionamiento.

Los términos 'noúmeno' y 'fenómeno' provienen de hecho del griego. 'Noúmeno' procede de 'nous' [νοῦς] y puede decirse que significa "lo que es pensado mediante la razón" o "lo inteligible". 'Fenómeno' proviene de 'phainómenon' [φαινόμενον], que significa "lo que aparece". Los fenómenos son, por tanto, las apariencias o lo que se nos aparece de las cosas. En su origen pues los fenómenos se contraponen a la realidad verdadera. Por otro lado, en la tradición filosófica "realista" el mundo de los noúmenos es el que se califica de real. La contraposición entre fenómenos y noúmenos es una contraposición entre mundos, el mundo de lo sensible y el de lo inteligible, el marco de la experiencia posible y lo que cae fuera de nuestra experiencia. Identificar entonces los conceptos matemáticos con noúmenos los sitúa fuera del campo de nuestra experiencia. Sin embargo, esto se compagina mal con una de las características de las matemáticas que el mismo Freudenthal señala de inmediato: un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno o unos fenómenos, pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, y este proceso se repite una y otra vez. Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan.

Con el fin de poner seguir interpretando las ideas de Freudenthal en el sentido que acabo de apuntar, me parece pues prudente, en vez de cargar los términos con el peso de los significados que han sido producidos por los filósofos, despojarlos al máximo de ellos. Prescindiré por completo del término 'noúmeno', que substituiré simplemente por 'medio de organización', esto es, por la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos. Mantendré el término 'fenómeno' como una manera de hablar de lo que es objeto de nuestra experiencia matemática, dejando de lado explícitamente su significado original de apariencia, y teniendo presente que los medios de organización de los fenómenos, aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia matemática, es tomado a su vez como objeto de experiencia. El par fenómenos/medios de organización está definido así por la relación entre ambos y no por la pertenencia a mundos distintos y se despliega en una serie fenómenos/medios de organización en la que los medios de organización de un par pasan a ser fenómenos del siguiente. Hacer fenomenología es entonces describir una de esas series o uno de sus pares.

3.1.4. TIPOS DE ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

El análisis fenomenológico desarrollado por Freudenthal, aunque tome prestados términos de la filosofía —como acabamos de ver— y tenga consecuencias para cómo se conciba la naturaleza de las matemáticas —como veremos en el apartado siguiente—, está hecho al servicio de la didáctica. Sin embargo, Freudenthal distingue varios tipos de fenomenología, todos importantes desde el punto de vista de la didáctica, pero sólo uno de ellos calificado de didáctico. Esos tipos son:

Fenomenología.

Fenomenología didáctica.

Fenomenología genética.

Fenomenología histórica.

Lo primero que caracteriza cada uno de estos análisis fenomenológicos es los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto cuyo análisis se realiza. En el primer caso se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento actual y considerando su uso actual. En el caso didáctico intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza. En el caso genético, los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices. En el caso histórico se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos.

La descripción de las relaciones entre los fenómenos y el concepto toma en consideración en el primer caso las que están establecidas y en los otros tres cómo se produjeron, se adquirieron o se conformaron esas relaciones en el sistema educativo, con respecto al desarrollo cognitivo o en la historia, respectivamente.

Además, en el caso de la fenomenología pura, los conceptos o las estructuras matemáticas se tratan como *productos* cognitivos, mientras que en el caso de la fenomenología didáctica se tratan como *procesos* cognitivos, es decir, situados en el sistema educativo como materia de enseñanza y siendo aprendidos por los alumnos. Freudenthal dice que al escribir una fenomenología didáctica uno puede pensar que debería estar basada en una fenomenología genética, pero que esta idea es errónea. El orden en que hay que desplegar los distintos tipos de análisis fenomenológico comienza por la pura fenomenología (para la que basta conocer las matemáticas y sus aplicaciones), se completa con una fenomenología histórica, sigue por una fenomenología didáctica (para lo que hay que conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje) y termina, en todo caso, con una fenomenología genética. Ningún análisis fenomenológico puede resultar efectivo cuando se organice posteriormente la enseñanza a partir de él si no se sustenta en un sólido análisis de pura fenomenología.

3.2. UNA CONCEPCIÓN DE LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

3.2.1. UN SOLO MUNDO EN EXPANSIÓN.

El análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas. Cabría la posibilidad de utilizarlo sin adoptar ningún compromiso epistemológico u ontológico sobre las matemáticas, es decir, aceptar que para la organización de la enseñanza podemos ver los conceptos matemáticos como medios de organización de fenómenos, sin mantener que las cosas sean realmente así. Sin embargo, las ideas que los alumnos se forman de la naturaleza de las matemáticas y las que tienen los profesores influyen de forma extremadamente importante en cómo unos y otros conciben la actividad matemática que hay que realizar en las clases y los conocimientos que unos elaboran y los otros pretenden enseñar. Por ello, voy a exponer en este apartado un esbozo de una concepción de la naturaleza de las matemáticas que me parece compatible con la interpretación que acabo de hacer del análisis fenomenológico de Freudenthal.

Partiremos, por tanto, de la afirmación de que los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos del mundo. Ahora bien, esta caracterización nos dice poco si no precisamos a qué nos referimos cuando hablamos del mundo y si no establecemos qué fenómenos organizan los conceptos matemáticos. Sin embargo, una de las tareas de la fenomenología es precisamente indagar, analizando los conceptos matemáticos, cuáles son los fenómenos que organizan, de modo que no se puede pretender saber de antemano cuáles son. Yo tampoco puedo pretender caracterizar de entrada el *tipo* de fenómenos organizados por las matemáticas, porque para ello necesitaría haber engarzado la fenomenología de las matemáticas en una fenomenología general en la que se establezca una tipología de los fenómenos —tarea que podría abordarse, a mi entender, con la fenomenología de Pierce—, de modo que sólo podremos tener una idea del tipo de fenómenos de que se trata a partir de los análisis concretos que realicemos.

Es posible interpretar, por otro lado, que de la afirmación precedente se deriva que las matemáticas se encuentran en un mundo separado del mundo cuyos fenómenos organiza y que éste es el mundo que nos rodea, el mundo real. Esa interpretación, sin embargo, no me parece la más adecuada.

En efecto, si nos situamos en el origen, o en el nivel más bajo, podríamos decir que los fenómenos que van a ser organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos de ese mundo real, físico, cotidiano. Nuestras experiencias con ese mundo físico tienen que ver con los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades que tienen esas acciones. De modo que los fenómenos que va a organizar las matemáticas son los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones, cuando objetos, propiedades, acciones o propiedades de acciones son vistos como lo que organizan esos medios de organización y se consideran en su relación con ellos.

Esta primera interpretación sirve para hacer patente la idea de que los conceptos matemáticos no están pues en un mundo ideal cuyo reflejo estudiamos, ni tienen una existencia anterior a la actividad matemática, ni ésta consiste por tanto en el descubrimiento de la geografía del mundo en el que están esos objetos. Pero tampoco, al ser creados como medios de organización de fenómenos del mundo, se instalan en un mundo ajeno a nuestra experiencia. La interpretación anterior no es afortunada en este punto porque no toma en cuenta que Freudenthal no se queda en el nivel más bajo describiendo la actividad matemática simplemente como un juego entre fenómenos del mundo y medios de organización de las matemáticas, en el que los fenómenos solicitan ser organizados y se crean medios para ello en las matemáticas. Por el contrario, el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización lo acompaña Freudenthal de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos. En consecuencia, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos / medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez.

Las matemáticas están por tanto en el mismo mundo de los fenómenos que organizan: no hay dos mundos sino uno que crece con cada producto de la actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática; los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos de ese mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, en tanto se encuentran en el primer término de un par fenómenos / medios de organización.

La progresión escalonada de pares fenómenos / medios de organización comporta dos procesos: el proceso de creación de conceptos matemáticos como medios de organización, que viene indicado por cada par, y el proceso por el cual se objetiva un medio de organización de forma que puede entrar a formar parte de un nuevo par, ahora en la posición de los fenómenos. La progresión escalonada dibuja una imagen de la producción de objetos matemáticos cada vez de nivel más elevado, más abstractos, y muestra que la actividad matemática genera su propio contenido.

He dicho que en el proceso de creación de conceptos matemáticos lo que se crea no son objetos ideales que se sitúan en un mundo ajeno a nuestra experiencia. Desde mi punto de vista esto es así fundamentalmente por el papel que desempeñan los sistemas de signos en que se expresan, se representan o se escriben las matemáticas en la práctica matemática. De ello me ocupo a continuación.

3.2.2. SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS

Los textos matemáticos aparecen a cualquier mirada, experta o profana, plagados de signos que no pertenecen al lenguaje vernáculo. Este hecho hace que sea corriente hablar del lenguaje de las matemáticas como un lenguaje distinto del vernáculo. Además, en la historia de las matemáticas hay episodios en que la elaboración de un lenguaje propio de la matemáticas ha constituido una tarea esencial. De la combinación de ambos hechos se deriva que la idea más ampliamente extendida sea que existe un lenguaje propio de las matemáticas diferente del lenguaje vernáculo. Esta idea está presente radicalmente en quienes conciben que las verdaderas matemáticas o las matemáticas rigurosas son las escritas en un lenguaje totalmente formalizado y que, si en su práctica cotidiana los matemáticos no escriben las matemáticas así, es porque sería extraordinariamente penoso y por ciertas limitaciones internas de los formalismos; por usar la expresión de Bourbaki, los textos matemáticos efectivamente escritos están llenos de "abusos de lenguaje", ya que están escritos en parte en lenguaje vernáculo y éste se ve como un substituto torpe y grosero del lenguaje matemático.

Una consecuencia de esta idea incluso en sus versiones más alejadas del formalismo es que las descripciones que se suelen hacer del lenguaje en que están escritos los textos matemáticos distinguen dos subconjuntos de signos en ellos: uno formado por signos que suelen llamarse "artificiales" y se subrayan como los propios de las matemáticas y otro por los signos de alguna lengua vernácula. Ahora bien, lo que a mi entender interesa más desde un punto de vista didáctico no es el estudio de los signos y sus tipos, sino el estudio de los procesos de significación y producción de sentido. Entonces, esa diferencia entre un "signo artificial" —que sería el propiamente matemático— deja de ser crucial, para colocar en primer plano el sistema de signos considerado globalmente. Lo que hay que calificar de matemático entonces no es un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos, es decir, hay que hablar de *sistemas matemáticos de signos* y no de *sistemas de signos matemáticos*.

Lo que se está usando en la actividad matemática no lo voy a separar, por tanto, en signos matemáticos o un sistema de signos matemáticos, el lenguaje vernáculo y, quiza, otros medios de representación. Por el contrario, voy a considerar que todos los signos que se usan, están combinados constituyendo un sistema matemático de signos. Ahora bien, una vez he subrayado que lo voy a tratar como un sistema, tengo que señalar que, a diferencia de los que sucede con el sistema de las lenguas vernáculas, sus signos no son homogéneos. Además, como quiero tomar en consideración todos los signos que se usan en la actividad matemática, me parece más conveniente adoptar una terminología tomada de la semiótica, en vez de una tomada de la lingüística, ya que muchos de los signos que se usan en la actividad matemática no tienen naturaleza lingüística. En ese sentido, prefiero no usar la pareja significante / significado que introdujo Saussure para describir las dos caras del signo, sino hablar —como hacen Eco o Barthes, siguiendo a Hjemslev— de expresión y contenido de un signo (o una función semiótica, en general). En esos términos, los sistemas matemáticos de signos contienen signos cuya materia de la expresión es heterogénea —característica que los separa de las lenguas vernáculas, como ya he dicho, y que comparten con los sistemas de signos de otras actividades humanas como el cine o la canción.

Vale la pena señalar que el par expresión / contenido, en las teorías semióticas a las que me he referido, se presenta mediante el diagrama

<table>
<tr><td colspan="2">expresión</td><td>contenido</td></tr>
<tr><td>expresión</td><td>contenido</td><td></td></tr>
</table>

ya que el signo, que se compone de expresión y contenido, se sitúa en la relación de ser la expresión de un contenido al que remite o que implica (y que es de hecho otro signo).

Este carácter dinámico, implicativo del signo resulta a mi entender particularmente esclarecedor para los sistemas matemáticos de signos, ya que éstos se ven involucrados en la relación fenómenos / medios de organización, y en ella los conceptos matemáticos son creados por los sistemas matemáticos de signos que los describen. De ahí que los objetos matemáticos así creados no sean entonces objetos ideales que se coloquen fuera del mundo de nuestra experiencia ya que tienen la existencia material que les dan los sistemas de signos que simultáneamente los describen y los crean.

Correlativamente, la abstracción progresiva generada en el proceso de objetivación de los medios de organización y su situación como fenómenos ante unos nuevos medios de organización tiene su expresión en la creación de sistemas matemáticos de signos también más abstractos, con los que se crean esos conceptos más abstractos.

3.2.3. Otros trazos que hacen el cuadro más complejo.

Lo que he expuesto hasta aquí son los rasgos más importantes de una concepción de la naturaleza de las matemáticas que hace uso de ideas que se derivan de la fenomenología de las matemáticas desarrollada por Freudenthal y de una idea de sistemas matemáticos de signos que tiene su origen en trabajos realizados por Eugenio Filloy[*]. Sin embargo, es obvio que el cuadro que trazan es todavía demasiado simple. En lo que sigue apunto algunas ideas que a mi entender son necesarias para completar el cuadro. Esas ideas proceden de Lakatos y de Kitcher; como no voy a desarrollarlas en detalle sino sólo relacionarlas con las anteriormente expuestas, remito al lector a los textos correspondientes que aparecen en la bibliografía.

3.2.3.1. Las acciones permitidas.

Lo que se convierte en objeto de experiencia en la actividad matemática lo he descrito como objetos del mundo, propiedades de los objetos, acciones que realizamos sobre esos objetos y propiedades de esas acciones. Kitcher introduce la idea, esencial para poder dar cuenta de gran parte de las matemáticas que efectivamente han sido producidas a lo largo de la historia, de que las acciones mencionadas no son las que nosotros efectivamente realizamos o somos capaces de realizar, sino que son las acciones que establecemos que puede realizar un sujeto ideal al que dotamos de poderes

[*] Cf. E. Filloy. *Theoretical Aspects of PME Algebra Research*. Manuscript. Institute of Education, University of London, 1988.

de actuación que van más allá de los que tenemos, por ejemplo, recorrer la secuencia de los números naturales o usar la función de elección de Hilbert.

Esta idea de Kitcher tiene el peligro de hacer pensar que las matemáticas puedan desarrollarse a partir de estipulaciones arbitrarias de esos poderes y que, por tanto, generen conceptos matemáticos carentes de todo fin epistémico o práctico. Este peligro está de hecho presente, pero se conjura en la práctica de varias maneras.

Una tiene que ver con la idea que he introducido anteriormente del papel de los sistemas matemáticos de signos en la creación de los conceptos matemáticos y la elaboración, correlativa al ascenso en la cadena fenómenos / medios de organización, de sistemas matemáticos de signos más abstractos. Esos sistemas matemáticos de signos no sólo nos permiten organizar los fenómenos creando los conceptos pertinentes, sino que también nos hacen capaces de realizar nuevas acciones sobre los objetos matemáticos o de apreciar la posibilidad de que, si estuviéramos liberados de ciertas limitaciones de tiempo o consumo de energía, pudiéramos realizarlas. En este sentido, las acciones nuevas que establecemos que son realizables no son acciones arbitrarias sino aquéllas que vienen sugeridas por los sistemas matemáticos de signos más abstractos —y, en este sentido, extienden acciones que en un nivel inferior nos habíamos visto capaces de realizar o habíamos establecido que eran realizables.

Por otro lado, desempeña un papel importante como mecanismo de regulación la aceptación por parte de la comunidad de matemáticos de que esas nuevas acciones van a incorporarse al elenco ya establecido —aceptación que no está exenta de controversia, como el propio ejemplo de la función de elección de Hilbert atestigua.

3.2.3.2. Los conceptos no son inmutables. Conceptos generados por la prueba.

Hemos visto que los conceptos matemáticos se crean en el proceso fenómenos / medios de organización, pero esto no significa que una vez creados permanezcan inmutables. Por el contrario, los conceptos matemáticos se modifican en la historia como consecuencia de su uso y de los nuevos sistemas matemáticos de signos en que se describen. Esto no quiere decir, sin embargo, que las modificaciones de un concepto indiquen que el concepto original era erróneo y que tengamos que ver la historia de los conceptos matemáticos como un avance hacia la verdad, ya que hemos rechazado que los objetos matemáticos tengan una existencia anterior al proceso que los crea.

Una idea distinta de la evolución de los conceptos en la historia es la que desarrolló Lakatos en su libro *Pruebas y refutaciones*. Para lo que aquí nos interesa, Lakatos examina en ese libro cómo evolucionan los conceptos bajo la presión de la prueba de teoremas en los que están involucrados.

Lakatos narra cómo tras el establecimiento de la conjetura de que para un poliedro cualquiera se verifica la relación $C + V = A + 2$ y su prueba por Euler surgen ejemplos de sólidos que no encajan con la prueba realizada o, lo que es más importante, con el teorema probado. Desde una concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos según la cual hay un objeto ideal preexistente al que llamamos poliedro y la actividad matemática lo que hace es descubrir sus propiedades, el asunto está claro: esos sólidos no son verdaderos poliedros o la demostración es errónea. La reconstrucción de la historia que hace Lakatos no es ésta.

Lakatos separa los dos tipos de contraejemplos que acabo de mencionar, y los llama contraejemplos locales y globales, respectivamente. Un contraejemplo local es el que tiene características que hacen que para él la prueba no sea aplicable, pero que verifica la relación. Estos contraejemplos no refutan la conjetura: lo que hacen es indicar que en la prueba se ha usado una propiedad que se suponía valida para todos los poliedros, pero que esto no es así. Lo que queda entonces refutado es un lema que se ha usado implícitamente y, por tanto, la prueba. La presencia de estos contraejemplos introduce una diferencia en los conceptos que antes no estaba presente.

Los efectos de la aparición de contraejemplos globales tienen más importancia para lo que estamos examinando. Un contraejemplo es global cuando refuta la conjetura. Lakatos presenta como primeros contraejemplos globales del teorema planteado por Euler el sólido que consiste en un cubo con un hueco cúbico en su interior, y un sólido formado por dos tetraedros unidos por una arista o un vértice; más adelante presenta el caso aún más interesante de un sólido estrellado, que verifica o no la relación según que se considere que sus caras son los polígonos estrellados o no. La presencia de esos sólidos como contraejemplos produce una tensión entre el concepto, el teorema y su prueba. Esa tensión puede resolverse de varias maneras que afectan todas ellas al concepto de poliedro. Las más elementales son:

1) Exclusión de monstruos.

Los contraejemplos presentados no se consideran ejemplos genuinos del concepto de poliedro, sino monstruos, esto es, seres cuya existencia es posible pero no deseada. La posibilidad de su existencia viene determinada por la definición de poliedro que se está utilizando, ya sea explícita o implícitamente, de modo que, para salvar el teorema, se elabora una nueva definición del concepto de poliedro que los excluye explícitamente.

2) Exclusión de excepciones.

Los contraejemplos presentados se consideran ejemplos del concepto, cuya existencia no se había previsto al enunciar la conjetura. La conjetura se modifica con la intención de retirarse a un terreno seguro. Para ello se introduce una diferencia en el concepto, que separe a estos ejemplos.

3) Ajuste de monstruos.

Los objetos se miran de otra manera que hace que dejen de ser contraejemplos; es el caso de las dos formas de ver los poliedros estrellados: como compuestos de polígonos estrellados o no.

Aunque éstas sean sólo las formas más elementales de enfrentarse a la tensión creada, simplemente con ellas podemos ver que el concepto de poliedro se ve afectado en todos los casos. Ya se acepten o se excluyan los contraejemplos como ejemplos del concepto, el campo semántico se amplía. En un caso, porque el contenido de la expresión aumenta o, dicho de otra manera, el campo de fenómenos para los que el concepto se había creado —que es lo que constituye su campo semántico— no contenía los correspondientes a los objetos y las propiedades que ahora están presentes y se extiende a ellos. En el otro caso, porque el concepto entra en un juego de relaciones con esos nuevos objetos de los que se desmarca explícitamente en la nueva definición, que forman también parte constitutiva de su contenido.

La historia completa es más compleja y en ella intervienen también los sistemas matemáticos de signos progresivamente más ricos o más abstractos a los que se traducen los conceptos expresados inicialmente en otros sistemas matemáticos de signos menos ricos o menos abstractos, y hace afirmar a Lakatos que los conceptos generados por la prueba no mejoran los conceptos originales, no son especificaciones ni generalizaciones de ellos, sino que los convierten en algo totalmente distinto, crean nuevos conceptos. Esto es precisamente lo que me interesa subrayar: el resultado del proceso que presenta Lakatos de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas no es la delimitación del verdadero concepto de poliedro que se correspondería al objeto ideal preexistente, sino la creación de nuevos conceptos.

Una buena ilustración del resultado de la historia que narra Lakatos es leer las definiciones de polígono y poliedro que pueden encontrarse hoy en día en los libros de matemáticas. Por ejemplo, las que transcribo a continuación, acompañadas de las definiciones correspondientes de polígono regular y poliedro regular, tomadas todas ellas del mismo libro*:

Polígono:

En el espacio euclídeo n-dimensional, un *polígono* $A_0A_1A_2\ldots$ es una figura formada por una sucesión de puntos llamados *vértices*, unidos en pares sucesivos por segmentos A_0A_1, $A_1A_2\ldots$ llamados *aristas*.

Polígono regular:

Para una isometría cualquiera S, un punto no invariante A_0 tiene una órbita, que es el conjunto de puntos A_n en los que se transforma el punto A_0 por las potencias S^n, en las que n recorre los enteros. Diremos entonces que el polígono $A_0A_1A_2\ldots$ así generado es *regular*. Ya que los valores posibles de n incluyen los enteros negativos, la sucesión de puntos va tanto hacia adelante como hacia atrás, y el polígono $A_0A_1A_2\ldots$ debería describirse de forma más precisa así: $\ldots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\ldots$

* H. S. M. Coxeter, *Regular Complex Polytopes*. Cambridge University Press: London, 1974. Las definiciones están en las páginas 3-4 y 12.

Poliedro:

Un *poliedro* es un conjunto finito de polígonos planos, llamados *caras*, junto con todos sus *aristas* y *vértices*, que satisfacen las tres condiciones siguientes:

i) Toda arista pertenece exactamente a dos caras y esas caras no están en el mismo plano.

ii) Las caras que comparten un vértice forman un único ciclo, esto es, su sección por una esfera suficientemente pequeña, centrada en el vértice común, es un polígono esférico único.

iii) Ningún subconjunto propio de las caras satisface la condición i).

Poliedro regular:

Para un poliedro cualquiera, definimos como una *bandera* (A, AB, ABC…) la figura formada por un vértice A, una arista AB que contiene a ese vértice y una cara ABC… que contiene a esa arista. Un poliedro es *regular* si su grupo de simetrías es *transitivo en sus banderas*.

Este ejemplo es particularmente notable porque la definicion propuesta de polígono y la de poliedro llevan la huella, cada una de ellas, de formas distintas de responder a la tensión que estamos examinando. Salta a la vista que la definición de polígono está elaborada aceptando nuevos objetos y ampliando así inmensamente de forma explícita el contenido del concepto (y se acompañará después de un desglose necesario en polígonos de múltiples tipos).

En la definición de poliedro, por el contrario, cada una de las condiciones está introducida para excluir determinados objetos. Así, por ejemplo, la condición i) no permite considerar como poliedro el sólido formado por dos tetraedros unidos por una arista y responde por tanto a la exclusión de monstruos. Sin embargo, esa misma condición no permite que un poliedro estrellado se interprete como un poliedro cuyas caras no son los polígonos estrellados correspondientes, ya que, si se hace esto, hay necesariamente caras que están en un mismo plano. Así que esa condición no autoriza el ajuste de ese monstruo y, por tanto, los poliedros estrellados son poliedros a condición de que sus caras sean los polígonos estrellados correspondientes. El aumento del contenido del concepto de poliedro está aquí en las relaciones que cada una de las condiciones establece con otros objetos matemáticos y en su expresión en el sistema de signos en que se presenta.

3.2.3.3. RESOLVER PROBLEMAS, DEFINIR Y OTROS PROCESOS QUE TAMBIÉN GENERAN CONCEPTOS.

De Lakatos acabo de extraer la idea de que los conceptos matemáticos no permanecen inmutables una vez creados. También he esbozado cómo los conceptos cambian, impelidos por la tensión que les produce el estar involucrados en pruebas y refutaciones. Ahora bien, la actividad matemática no consiste solamente en probar teoremas. Uno de los motores fundamentales del desarrollo de las matemáticas es la resolución de problemas y ésta engloba la prueba de teoremas, pero también otras actividades.

La resolución de problemas engloba la prueba de teoremas en dos sentidos. En el primer sentido, la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas considerada globalmente, ya que, si seguimos la terminología de Pólya y en vez de distinguir entre problemas y teoremas como hicieron por primera vez los matemáticos griegos los llamamos a todos problemas y distinguimos entre problemas de encontrar y problemas de probar, entonces la prueba de teoremas no es sino un tipo de resolución de problemas: la resolución de problemas de probar.

En el segundo sentido, más importante, la resolución de problemas engloba la prueba de teoremas en la resolución de cada problema en particular; en efecto, lo que caracteriza la resolución de problemas en matemáticas, incluso cuando se trata de problemas de encontrar, es que la obtención del resultado se tiene que acompañarse de un argumento que justifique que el resultado obtenido verifica las condiciones del problema, esto es, cualquier problema es un problema de probar o, si es de encontrar, contiene un problema de probar —el problema de probar que el resultado encontrado verifica las condiciones del enunciado.

Este hecho ya nos obliga a extender el terreno en que los conceptos se ven sometidos a la tensión que los modifica más allá de la prueba de teoremas a la resolución de problemas. Pero además aún resulta más necesario hacerlo si tomamos en consideración otras partes de la resolución de problemas que no son la prueba de teoremas, en concreto, el planteamiento de nuevos problemas o el estudio de familias de problemas.

La resolución de problemas tampoco agota el campo de actividades matemáticas, ni el de actividades matemáticas que generan conceptos. Otras actividades que son responsables de la creación de gran parte de los conceptos matemáticos tal y como ahora los conocemos tienen que ver con la *organización* de conjuntos más o menos extensos de resultados —obtenidos en la actividad de resolver problemas y probar teoremas— en un *sistema deductivo*. Esa organización sistemática ha adoptado formas distintas a lo largo de la historia, y puede ser más local o más global, más o menos axiomática o formalizada, pero en cualquier caso constituye un componente esencial de las matemáticas, desde que los matemáticos pasaron de acumular resultados y técnicas para obtenerlos a escribir “elementos”. En efecto, aunque aquí no voy a detallar ese conjunto de actividades, un rasgo esencial suyo es que ha transformado el sentido en que se usan las definiciones en las matemáticas. En matemáticas, una definición no sirve simplemente para explicar a la gente lo que significa un término, sino que, cuando consideramos las actividades matemáticas mediante las cuales se organizan sistemas deductivos, las definiciones —usando una expresión de Freudenthal— son *eslabones en cadenas deductivas*.

El proceso de definir es, entonces, un medio de organización deductiva de las propiedades de un objeto matemático, que pone en primer plano las que se juzga que permiten constituir un sistema deductivo, local o global, en el que ese objeto matemático esté incorporado. Ahora bien, resaltar unas propiedades como las que definen un concepto no es una operación inocente, neutral con respecto al concepto, ya que, por un lado, hace aparecer ese concepto como creado originalmente para organizar los fenómenos correspondientes y, por otro lado, hace que el contenido del concepto sea a partir de ese momento lo que se derive de esa definición en el sistema deductivo al que se ha incorporado. Por tanto, al igual que sucede al probar teoremas, este proceso de definir crea también nuevos conceptos. En el apartado siguiente examinaremos este extremo con respecto al concepto de número que definió Peano.

3.3. CONSTITUCIÓN DE OBJETOS MENTALES VS ADQUISICIÓN DE CONCEPTOS.

3.3.1. OBJETOS MENTALES Y CONCEPTOS

En los apartados anteriores he hablado de los conceptos matemáticos, de su creación en una relación fenómenos / medios de organización, de la objetivación de los medios de organización y su entrada en una relación fenómenos / medios de organización de nivel superior; también he hablado de las transformaciones de los conceptos como consecuencia de las actividades matemáticas de probar teoremas, resolver problemas, organizar en un sistema deductivo y del proceso de definir. Todo ello acompañado de la afirmación de que los conceptos matemáticos no tienen una existencia independiente de la actividad matemática que los crea. En este apartado voy a hacer entrar en escena una nueva idea desarrollada por Freudenthal que nos obligará a volver a pensar lo que he desarrollado hasta aquí: se trata de la idea de objeto mental, contrapuesta a concepto.

Para mí esta idea es importante sobre todo porque a partir de ella Freudenthal adopta una toma de partido didáctica: el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos —en segundo lugar tanto temporalmente como en orden de importancia. Esta toma de partido es además particularmente importante para la etapa obligatoria de la escolaridad ya que en ella hay que considerar qué hay que ofrecer de las matemáticas al conjunto de la población. Pero además es importante para el análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos; más aún si ese análisis es una fenomenología didáctica y se tiene en mente que el análisis es previo a la organización de la enseñanza y se realiza con ese objetivo. De ese aspecto es del que voy a tratar aquí.

En una primera aproximación, la contraposición objeto mental / concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos. En los apartados anteriores, al hablar de los conceptos matemáticos los hemos considerado básicamente en la disciplina y apenas hemos hecho intervenir a las personas concretas; en todo caso ha aparecido su trasunto, el sujeto ideal que realiza acciones con poderes superiores a los que nosotros tenemos. Podemos partir pues de una imagen inicial: la contraposición objeto mental / concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas —los objetos mentales— y lo que está en las matemáticas como disciplina —los conceptos.

Como éste es el sentido en que Freudenthal usa esos términos y en el que los voy a usar aquí, conviene advertir antes de continuar que en el uso corriente no suele aparecer el término ‘objeto mental’. Lo habitual es que también se hable del concepto que tiene una persona —de número o de triángulo o de cualquier otra cosa, ya pertenezca a las matemáticas o no—, o que se use el término ‘concepción’ en vez de ‘concepto’ y se hable de la concepción que una persona tiene de circunferencia, por ejemplo; pero en este caso suele quererse subrayar que lo que hay en la mente de esa persona es una parte o una forma de ver el concepto*.

El concepto de perro no puede ladrar. Los alumnos a los que se intentó inculcar en la época de las llamadas “matemáticas modernas” el concepto de número —en una versión escolar de la construcción cantoriana de los cardinales— hubieran salido de la escuela sin poder numerar, si no hubieran constituido un objeto mental de número al margen de lo que los programas oficiales querían que se les enseñara. Usaré como ejemplo ese concepto complejo y múltiple para mostrar la diferencia entre objeto mental y concepto, describiéndola en términos semióticos en vez de como lo hace Freudenthal.

Si consideramos la actividad mundana de las personas y no sólo las actividades matemáticas de los matemáticos o las actividades escolares de los alumnos en las clases de matemáticas, el número o, mejor, los números se usan en contextos muy diversos. Una lista de esos contextos puede incluir los contextos de secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, guarismo escrito, mágico, cálculo. La descripción de las características de cada uno de los contextos no es mi objeto aquí: me interesa sólo mencionar la lista para mostrar que es posible distinguir una buena cantidad de ellos. Lo que me importa es explorar el significado que el número adopta en cada uno de esos contextos. Siguiendo por un momento a Wittgenstein, entenderé el significado constituido por el uso que se hace de un término, siendo el uso no un uso arbitrario, el producto de lo que a una persona le venga en gana hacer con el término en cuestión, sino una práctica sometida a reglas.

---

* El término ‘concepción’ contrapuesto a ‘concepto’ no sólo aparece en el uso cotidiano. También es un concepto de la didáctica de las matemáticas tal como la desarrolla la escuela francesa. Yo no voy a discutir aquí las diferencias entre la contraposición concepto / objeto mental en Freudenthal y la contraposición concepto / concepción en esa teoría. Tampoco sus diferencias con la contraposición concepto / imagen del concepto teorizada inicialmente por Vinner. Aunque las tres parezca que se refieren al mismo asunto, al estar enmarcadas en teorías diferentes no sólo lo explican de forma distinta sino que hablan de cosas distintas.

Los usos de los números en cada uno de esos contextos siguen reglas distintas: así, por ejemplo, cuando se dice “mi número de teléfono es tres, ochenta y seis, cuarenta y cuatro, ochenta y seis”, el número se refiere a un objeto y no describe ninguna propiedad suya ni de su relación con otros, sino que sirve para identificarlo —ése es el contexto de etiqueta, y en él, cuando la expresión es oral, las cifras que componen el número suelen expresarse aisladamente o en bloques de dos, como en el ejemplo que he referido—; en un contexto ordinal, el número se refiere a un objeto que está en un conjunto ordenado de objetos y describe qué lugar ocupa —“llegó el tercero” o “es el que hace tres”—; en un contexto cardinal, el número se refiere a un conjunto de objetos (sin orden o cuyo orden no se toma en consideración) y describe la numerosidad del conjunto —“hay tres”—; etc.

La totalidad de los usos de los números en todos los contextos constituye el *campo semántico* de “número”, el significado enciclopédico de “número”. La identificación del contexto en que el número se está usando permite a quien lee el texto, o recibe el mensaje, atenerse a la *restricción semántica* que establece el contexto y poder interpretarlo así de forma afortunada. Ahora bien, el sujeto que lee un texto o ha de interpretar un mensaje no opera en el conjunto de la enciclopedia —es decir, la totalidad de los usos producidos en una cultura o una episteme— sino en su campo semántico personal, que ha ido elaborando produciendo sentido —sentidos que se convierten en significados si la interpretación es afortunada— en situaciones o contextos que le exigían nuevos usos para “número” o los números.

Lo que Freudenthal llama “objeto mental número” se corresponde en mi descripción semiótica a este “campo semántico personal”. La toma de partido didáctica de Freudenthal por la constitución de objetos mentales es que la intención de los sistemas educativos tendría que ser, expresada en los términos que estamos usando, que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico —abarque suficientemente la enciclopedia— como para permitirle interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que haya de usar “número” o los números.

Los contextos de uso mundano de los números son los distintos lugares en que podemos experimentar los fenómenos que han sido organizados mediante el concepto de número, tanto los fenómenos para los que originalmente se creó como otros a los que se encuentra extendido en la actualidad. La idea de objeto mental que acabamos de introducir hay que verla también pues como un medio de organización de fenómenos: con el objeto mental número las personas son capaces, entre otras cosas, de numerar. Los objetos mentales se constituyen en cadenas fenómenos / medios de organización, de la misma manera que sucede con los conceptos, con el consiguiente aumento de nivel —de hecho, los contextos de uso mundano de los números que he mencionado se sitúan en los niveles más bajos, y, para dar cuenta de la riqueza fenomenológica del número en la secundaria, hay que tomar en consideración otros contextos, entre ellos contextos ya matematizados.

Ésta es mi explicación inicial de lo que es un objeto mental y cómo se constituye, pero esto que Freudenthal llama objeto mental podía haberse denominado simplemente el concepto que una persona tiene de número. Para justificar la introducción de un término que lo distinga hace falta explicar para qué otra cosa se reserva el término de 'concepto' y en qué se distingue de lo que acabamos de denominar "objeto mental". Ya he dicho que la primera distinción es que los objetos mentales están en la mente de las personas y los conceptos están en las matemáticas. Pero esto apenas sería razón suficiente para contraponer objeto mental a concepto si pensáramos que el objeto mental es el reflejo del concepto en la mente de las personas. La relación entre objeto mental y concepto no es sin embargo una relación especular. Lo explicaré de nuevo en términos semióticos.

El objeto mental número lo he identificado con el campo semántico personal y éste proviene de todos los usos de los números en todos los contextos en que éstos se usan, de un campo semántico formado por todos los significados culturalmente establecidos. Los conceptos matemáticos de número natural —y uso el plural para poner de relieve que considero como conceptos distintos los elaborados por Peano, Cantor o Benacerraf, por ejemplo— tal como están en las matemáticas actuales son el producto de una larga historia, cuyos procesos de creación y modificación de conceptos ya he examinado en los apartados anteriores. Desde la descripción semiótica que estoy usando ahora, cualquier concepto matemático de número que quiera examinarse una vez ya creado aparece como resultado del proceso de definir que lo ha incorporado a un sistema organizado deductivamente como un *recorte del campo semántico*. Así, por ejemplo, el concepto de número natural elaborado por Peano —sobre todo en sus versiones más modernas— puede verse como el desmenuzamiento del significado propio del contexto de secuencia y su presentación en forma de una serie de axiomas, que dan cuenta exhaustiva de sus componentes. El concepto de número natural que se deriva de la construcción cantoriana, por su parte, se adscribe, desde el propio nombre que le dio Cantor en su intención original, al contexto cardinal.

Los conceptos aparecen en esta explicación relacionados directamente con una parte del objeto mental, ya que en el proceso de definir se ha seleccionado parte del significado que abarca el objeto mental. De inmediato señalaré que ésa no es la única diferencia y que la relación entre objeto mental y concepto no quiero dar a entender que sea una relación entre una parte del contenido del objeto mental y la totalidad de su contenido. Pero antes de ello quiero indicar que lo que esta explicación establece fundamenta la toma de partido de Freudenthal que he mencionado al comienzo de este apartado: la adquisición del concepto es un objetivo educativo secundario, que puede posponerse a una sólida constitución de los objetos mentales, y, en todo caso, es posterior a ésta.

La relación entre objeto mental y concepto es más compleja de lo que muestra la explicación que acabo de dar usando el ejemplo de número, porque mi explicación se ha limitado a comparar el despliegue del campo semántico de número y la definición de Peano, como si no hubiera toda una historia de siglos que ha producido tanto los contextos de uso —que ya nos los vamos a encontrar con huellas de su organización por conceptos de número— como la definición de Peano. Tomando en cuenta lo que ya he expuesto de la naturaleza de los procesos de creación y modificación de conceptos que hay presentes en esa historia, la relación entre el objeto mental que puede constituirse a partir de los contextos mencionados y el contenido del concepto de número creado por la definición de Peano no se reduce a una relación parte / todo.

Constituir un objeto mental conlleva poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes, entonces el objeto mental está bien constituido. El objetivo de los sistemas educativos que marca Freudenthal es esta constitución de buenos objetos mentales. Adquirir el concepto implica examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas organizado local o globalmente en un sistema deductivo. La relación particular que cada concepto matemático tiene con el objeto mental correspondiente determina cómo se relaciona la constitución del objeto mental con la adquisición del concepto. Los constituyentes del objeto mental bueno se determinan gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente.

3.3.2 OBJETOS MENTALES Y CONCEPTOS EN LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

El análisis que nos ha conducido a distinguir entre objeto mental y concepto es un análisis didáctico. Esto es, en el análisis tenemos presente que lo que nos interesa es examinar las matemáticas, sus conceptos y sus estructuras, en la medida en que hay personas que quieren aprenderlas y hay un sistema, el sistema escolar, que quiere enseñar contenidos social y culturalmente establecidos. Por ello, hemos de tener presentes, por un lado, los conocimientos que los alumnos elaboran —los objetos mentales— y, por otro, los contenidos social y culturalmente establecidos que son los conocimientos a los que queremos que los alumnos accedan —los conceptos. La contraposición objetos mentales / conceptos la estamos examinando en el sistema educativo. Los objetos mentales los he situado en la mente de las personas porque son lo que éstas elaboran a partir de su experiencia, como medios de organización que le permiten dar cuenta de ella, y lo que les da poder sobre ella. Los conceptos los he estado situando en las matemáticas como disciplina, pero también son medios de organización de fenómenos y como tales los estamos tratando. Lo que sucede en el sistema escolar es que para los alumnos los conceptos preexisten a su experiencia con los fenómenos correspondientes y lo que el sistema quiere es que los alumnos constituyan un objeto mental como medio de organización de esos fenómenos y que tengan acceso a los medios de organización que la historia nos ha legado como medios valiosos de organización de esos fenómenos, es decir, a los conceptos.

Ahora bien, en la historia los conceptos matemáticos no son algo que preexista a nuestra experiencia, sino que es la actividad matemática la que los crea y la actividad matemática no es otra cosa que la actividad de los matemáticos. En ese sentido, los conceptos matemáticos, vistos ahora en la historia, no son sino cristalizaciones de objetos mentales. Incluso puede darse el caso, como señala Freudenthal, de que los matemáticos trabajen durante mucho tiempo con un objeto mental sin convertirlo en concepto: es lo que sucedió con la continuidad. ¿Qué quiere decir aquí “convertir un objeto mental en un concepto”? No estoy distinguiendo de la misma manera objeto mental de concepto ahora que cuando he examinado esa distinción como se presenta en el sistema escolar. Aquí no estoy hablando de aprender algo que ya está establecido en las matemáticas y que, por tanto, preexiste a nuestra experiencia, sino de la creación de nuevos conceptos matemáticos. Lo que ahora pongo de relieve es que uno de los procesos que crean nuevos conceptos matemáticos es el análisis de los objetos mentales que los matemáticos están usando como medios de organización de fenómenos con el fin de definirlos conceptualmente, es decir, incorporarlos al sistema de las matemáticas. La actividad matemática produce pues conceptos a partir de objetos mentales. Lakatos señala algo parecido en el relato que narra en *Pruebas y refutaciones* cuando en uno de sus episodios dice que poliedro aún no está definido, pero que se supone una *familiaridad* con el concepto.

Los asaltos al concepto por sucesivos contraejemplos producidos como consecuencia de la prueba de teoremas y las formas de modificar el concepto estudiadas por Lakatos de las que ya he hablado, también los podemos trasladar ahora al proceso por el cual un objeto mental se analiza y se perfila creando un concepto. A menudo entre el objeto mental y el concepto creado a partir de él se producen desajustes. Entonces uno puede admitir que su objeto mental no estaba tan bien constituido como pensaba y modificarlo o intentar una revisión de la definición conceptual.

Freudenthal señala el caso de la continuidad como ejemplo de ese desajuste, de esa distancia entre el objeto mental y el concepto creado a partir de él. Tan pronto se dio la primera definición explícita de continuidad, el objeto mental continuidad fue asaltado por numerosos ejemplos, que ahora eran ejemplos de funciones continuas de acuerdo con la definición, pero que nunca habían sido pensadas como tales con anterioridad — no eran ejemplos del objeto mental. Sin embargo, las nuevas generaciones de matemáticos —dice Freudenthal— se acostumbran pronto a esas nuevas funciones continuas aberrantes: educados por la definición de continuidad, por el concepto de continuidad, revisan su objeto mental primitivo. Ahora bien, ese objeto mental primitivo fue indispensable para el desarrollo de las matemáticas, y no ha sido substituido simplemente por el concepto, sino por un nuevo objeto mental que contiene al concepto creado por la definición, o que es compatible con él, al menos provisionalmente.

3.3.3. De los fenómenos a los objetos mentales y a los conceptos a través de la enseñanza.

Entre los objetos mentales y los conceptos la relación es variada. Ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos, los objetos mentales preceden a los conceptos y éstos no substituyen a los primeros sino que contribuyen a la formación de nuevos objetos mentales que los contienen o con los que son compatibles.

La distancia entre el objeto mental o, mejor, el primer objeto mental y el concepto puede ser un abismo: es el caso del objeto mental curva y el concepto de curva de Jordan, por ejemplo. En general, en la topología los objetos mentales no conducen muy lejos y es preciso formar conceptos y además mediante una formación de conceptos que involucra más que una organización local. Esos conceptos, entran en un campo de fenómenos que son organizados en un nivel más elevado por objetos mentales como espacios y variedades de dimensión arbitraria, que a su vez son convertidos en conceptos mediante nuevos procesos de organización y la creación de sistemas de signos más abstractos para describirlos. Como muestra este ejemplo, tras introducir la idea de objeto mental, el proceso de ascenso progresivo a través de la cadena de pares fenómenos / medios de organización se engarza con un proceso de transformación de objetos mentales en conceptos.

En otros dominios de las matemáticas, por el contrario, se puede avanzar mucho sin conceptos: es el caso de la geometría elemental en la que los objetos mentales son suficientes para organizar gran cantidad de fenómenos. Aquí, además, la formación de conceptos puede hacerse con organizaciones locales en las que se resuelvan las distancias entre los objetos mentales y los conceptos. Es el caso, por ejemplo, de rectángulo, cuyo primer objeto mental, es decir, el constituido a partir de las experiencias que organiza no es razonable que contenga a "cuadrado", pero que basta una organización local para que su concepto y su nuevo objeto mental modificado por el concepto pueda contenerlo sin conflicto.

Sin embargo, también hay en la geometría ejemplos de distancia entre el objeto mental y el concepto: es el caso de los conceptos elementales de punto, línea y superficie, que parecen estar muy cerca de objetos del mundo físico. Algunos objetos del mundo físico, en efecto, sugieren los objetos mentales: una mota o una marca hecha con un objeto punzante, un hilo tenso, una hoja de papel sugieren, respectivamente, que no se puede dividir más, que el ancho no tiene importancia con respecto al largo o que el grueso no la tiene respecto del largo y el ancho. Luego hay que perfilar esos objetos mentales para convertirlos en los conceptos que estan expresados en las definiciones con las que Euclides encabeza el libro primero de los *Elementos*:

Un punto es lo que no tiene partes.

Una línea es una longitud sin anchura.

Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.

Freudenthal señala que desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, el camino no va de una dimensión a tres, sino más bien al contrario: se tiene experiencia de las superficies como superficie de un cuerpo. Ahora bien, las fuentes fenomenológicas de la línea son tanto el correspondiente paso de tres dimensiones a dos, esto es, experimentar las líneas como bordes de superficies, como otras tales como flechas, hilos, caminos y cortes. En esta diferencia entre las fuentes fenomenológicas con las que se constituye los objetos mentales correspondientes y la presentación de los conceptos dados por sus definiciones euclídeas ya reside la distancia entre objetos mentales y conceptos en este caso. Pero esta distancia se torna aún mayor si nos fijamos en el objeto mental involucrado en el paso de uno a otro de éstos, es decir, en la dimensión. La transformación de la dimensión en un concepto se hace en topología; en ella aparece una distancia entre el objeto mental y el concepto que no sólo es tremenda, sino además de un tipo nuevo, producida por el hecho de que propiedades que desde el objeto mental son evidentes se tornan extremadamente difíciles de probar como, por ejemplo, que el producto cartesiano de n segmentos es n-dimensional.

La apoteósis de la distancia entre el objeto mental y el concepto de dimensión llega cuando se crean nuevos objetos que obligan a hablar de dimensiones fraccionarias.

Los análisis de fenomenología didáctica han de sustentarse en análisis de pura fenomenología teniendo presente que en muchos más casos de los que uno puede imaginar la distancia entre el objeto mental y el concepto es tan grande que no se pueden tender puentes entre uno y otro por medios didácticos en la escuela secundaria.

Para la constitución de objetos mentales a través de la enseñanza teniendo los conceptos presentes, la distancia entre ellos y las distintas formas que adopta esa distancia tienen entonces importancia. Además de los ejemplos que acabo de mostrar, vale la pena mencionar otros casos como los siguientes:

— En ocasiones, hay componentes esenciales para la formación del concepto que no son pertinentes para la constitución del objeto mental. Es el caso del número cardinal: la comparación de conjuntos sin estructura es esencial para el concepto, pero apenas desempeña papel alguno para la constitución del objeto mental porque, en las situaciones reales en que una persona experimenta el fenómeno que se organiza con el objeto mental número en su significado cardinal, los conjuntos de objetos rara vez carecen de estructura y, además, la estructura es un medio para realizar la comparación, en vez de algo que hay que eliminar para hacerla.

— En ocasiones, lo que muestra una fenomenología didáctica es que los fenómenos organizados por el concepto son tan variados que se constituyen de hecho objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se elija para explorar en la enseñanza, o varios objetos mentales si se exploran varios tipos de fenómenos. Para la adquisición del concepto es preciso integrar entonces esos distintos objetos mentales en un único objeto mental. Éste es el caso, por ejemplo, del concepto de área.

Longitudes, áreas y volúmenes son las magnitudes que se miden en la geometría elemental. Hace falta por tanto que se adquieran esos conceptos como parte del aprendizaje de la medida y la medición. La comparación entre cualidades de objetos es el comienzo de la actividad de medición. Ésta se convierte en medida por el intermedio del establecimiento de una unidad y la consideración de los objetos que se tratan como objetos de los que se puede predicar esa cualidad — por ejemplo, se les puede predicar la longitud si tiene sentido decir de ellos que son “largos”.

Ahora bien, longitud, área y volumen, como conceptos, son problemáticos por la variedad de enfoques para la constitución del objeto mental área (o volumen). En efecto, las figuras planas se pueden comparar con respecto al área directamente, si una es parte de otra, o indirectamente, despues de transformaciones de cortar y pegar, congruencias y otras aplicaciones que preservan el área; o bien midiéndolas ambas. La medida puede hacerse cubriendo la figura con unidades de área, o mediante aproximaciones interiores y exteriores; para lo cual se usa la aditividad del área bajo la composición de figuras planas que son mutuamente disjuntas, salvo sus fronteras (de dimensión uno), o la convergencia de las áreas por aproximación. No está claro que estos enfoques conduzcan al mismo resultado, y, de hecho, la prueba de que el resultado de la medición siguiendo todos esos procedimientos es la misma no es simple. La constitución del objeto mental volumen tiene además la complicación adicional de considerar los fenómenos correspondientes a la capacidad, que, usualmente, se miden con unidades distintas.

— En ocasiones, incluso es difícil distinguir el objeto mental del concepto. Al menos si se quiere tener un objeto mental unitario: sólo mediante el acceso al concepto es posible unificar un conjunto heterogéneo de objetos mentales. Éste es el caso del concepto de función. (Ver las notas sobre una fenomenología y una fenomenología histórica del concepto de función expuestas en 3.4.9.)

— Finalmente, hay objetos mentales cuyo campo de fenómenos sólo se presenta en un contexto matemático o matematizado. Un ejemplo de ello en la Educación Secundaria lo proporcionan los conceptos de la geometría analítica.

En efecto, en la historia, la localización global utilizando coordenadas conduce a la algebrización de la geometría. Mientras que el sistema de coordenadas polares utilizado para describir la bóveda celeste y la superficie terrestre ha servido para sistematizar la localización, el sistema de coordenadas cartesianas resulta particularmente eficaz para describir figuras geométricas y movimientos mecánicos y, más adelante, funciones en general. Una figura se traduce algebraicamente en una relación entre coordenadas, un movimiento en una función que depende del tiempo y una aplicación geométrica en un sistema de funciones de un cierto número de variables.

Los fenómenos que son propios de la geometría analítica son pues fenómenos producidos por la expresión de las propiedades geométricas en el complejo sistema de signos en que las expresiones algebraicas y la representación cartesiana se refieren mutuamente. Son, por tanto, fenómenos que sólo pueden explorarse en contextos matematizados previamente mediante el uso de esos sistemas de signos.

3.4. NOTAS PARA UNA FENOMENOLOGÍA DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.

3.4.1. NÚMERO.

Usar el singular en el caso del concepto de número es erróneo. No sólo hay conceptos distintos de número por la calificación que lleven (naturales, enteros, racionales, reales), sino que estrictamente hablando son conceptos distintos de número (natural) los elaborados, por ejemplo, por Cantor, Peano, Frege o Benacerraf. Ahora bien, la profusión del uso civil de los números en múltiples contextos, el encuentro de los niños con estos contextos y estos usos desde la más temprana edad y la referencia desde el lenguaje natural como ‘número’ a todos ellos obliga a una fenomenología didáctica a considerar la constitución de un objeto mental que integra otros objetos mentales adecuados para dar cuenta de cada uno de los usos de ‘número’ en cada uno de los contextos.

La exploración fenomenológica por parte de los alumnos que conduce a este objeto mental se ha iniciado fuera de la escuela y se ha proseguido a lo largo de la etapa de Primaria. Para introducir los análisis fenomenológicos que son pertinentes para la etapa de Secundaria hay que hacer referencia, aunque sea sucintamente, a esos primeros fenómenos y estudiar las extensiones y modificaciones de significado que producen los nuevos fenómenos con que se enfrentan los alumnos en esta etapa.

Como ya hemos mencionado en el apartado anterior, el objeto mental número se constituye para organizar fenómenos de naturaleza diversa, cuyas características pueden describirse fijándose en cuáles son los objetos a los que los números se refieren (objetos individuales, conjuntos, palabras, los propios números), si los objetos son discretos o continuos, si están previamente ordenados o no, de qué naturaleza son las unidades y qué es lo que describe el número de esos objetos a los que se refiere. Las distintas posibilidades que tienen esas características pueden clasificarse en términos de contextos de uso de los números, siendo una clasificación bastante común, la que considera los contextos cardinal, ordinal, de medida, de secuencia, de recuento, de etiqueta, mágico, de lectura de guarismos. El conjunto de todos los usos en todos los contextos compone el campo semántico de número y los que una persona concreta ha experimentado contribuyen a la constitución de su objeto mental ‘número’. La adquisición de los conceptos de número —ahora en plural— sólo puede hacerse a partir de buenos objetos mentales, mediante recortes de ese campo semántico.

Lo que importa para la Secundaria es que este proceso de constitución de objetos mentales no puede decirse que culmina en un determinado momento con la constitución de un objeto mental inmutable, tras el cual se tratará de constituir otros objetos mentales. Así, por ejemplo, el uso de números negativos modifica significados del contexto ordinal y de secuencia, y las expresiones decimales lo hacen en el contexto de medida.

Además hay que tener en cuenta que en el nivel de la secundaria los números no sólo se usan en los contextos que hemos señalado, que son contextos de uso de los números de nivel bajo, sino que también se usan en otros contextos matematizados. Las extensiones del significado de los números tienen su apoteósis en lo que podemos llamar el acceso algebraico al concepto de número. Este acceso se realiza tomando como fenómenos que hay que organizar las propias operaciones aritméticas y construye un concepto de número de nivel más elevado y de estilo muy distinto de todos los que se generan a partir de los contextos anteriores. Es número aquello con lo que pueden realizarse las operaciones aritméticas. Este nuevo concepto de número está presente en la historia haciendo posible la consideración como números legítimos de todos los números que cuando se han usado anteriormente se han calificado de ajenos al (verdadero) concepto de número, y se les ha puesto nombre de acuerdo con esta exclusión (imaginarios, falsos). La extensión de las operaciones de la aritmética a objetos no considerados como números con el fin de convertirlos en tales está presente ya en la obra de algebristas árabes del siglo XI como al-Karajī que tratan los objetos del álgebra explícitamente como números, y forma parte, por ejemplo, de los esfuerzos de Cantor para convencer a sus contemporáneos de que los números transfinitos que había creado podían realmente calificarse de números.

3.4.2. Operaciones aritméticas.

Lo dicho para 'numero' es también aplicable para cada una de las operaciones aritméticas. Así, la adición y la substracción como objetos mentales combinan los significados derivados de las acciones de seguir contando, unir conjuntos y yuxtaponer magnitudes en un campo semántico en que esos significados se han integrado gracias a las correspondencias entre ellos que proporcionan artefactos didácticos como, por ejemplo, la recta numérica. Multiplicación y división tienen una riqueza aún mayor de significados. Más que en el caso de 'número', los significados de las operaciones se ven afectados por la experiencia de nuevos fenómenos y tipos de números. Así, por ejemplo, es preciso extender el significado de 'número de veces' si se quiere dar sentido a la multiplicación de fracciones o de números decimales. Por otro lado, en los contextos más matematizados la extensión de las operaciones se concibe como extensión algebraica.

3.4.3. Razón y proporción.

La razón es una función de un par ordenado de números o de valores de una magnitud. Las operaciones aritméticas elementales también lo son, pero en ellas lo que importa es el valor que la función asigna a cada par y éste puede obtenerse por procedimientos algorítmicos. Ahora bien, si una razón se lee como el valor que se obtiene al efectuar la división correspondiente, la razón desaparece. El significado de razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de hablar de igualdad (o desigualdad) de razones, sin conocer el tamaño de la razón. El significado de razón viene de poder decir con sentido "*a* es a *b* como *c* es a *d*", sin anticipar que "*a* es a *b*" se puede reducir a un número que es el mismo al que se puede reducir "*c* es a *d*".

El estatuto lógico de la razón desde el punto de vista fenomenológico ha de describirse entonces en términos de la relación de equivalencia "tener la misma razón". Éste es de hecho también el que le dio Euclides, ya que en el libro V de los *Elementos*, definición 5, lo que realmente define no es "razón", sino "tener la misma razón". El estatuto lógico de la razón es pues, desde este punto de vista, de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y otros conceptos con los que los alumnos se han tropezado previamente en su escolaridad. El sentido en que calificamos el nivel de más elevado es el que le da el provenir de una relación de equivalencia: lo que organiza es una propiedad *intensiva* y no una propiedad *extensiva* de objetos o conjuntos de objetos.

La variedad de propiedades intensivas de objetos organizados por la razón es enorme. Aquí sólo señalaremos una gran división que es preciso tomar en cuenta en la enseñanza: la razón puede ser una relación *en* una magnitud o *entre* magnitudes. La situación se puede esquematizar así:

Hay dos espacios de medida —o magnitudes— y una aplicación lineal entre ellos. La razón *en* una de las magnitudes es interna; *entre* las dos magnitudes, externa. Una proporción conlleva una función lineal entre los espacios de medida. El que sea lineal significa que las razones internas son invariantes bajo la función y que las razones externas entre elementos que la función hace corresponder es constante. La linealidad viene dada respecto de las razones internas implícitamente —"en tiempos iguales se recorren espacios iguales"—, y respecto de las razones externas, explícitamente — $f(x)=\alpha x$, para todo x.

Una fenomenología didáctica muestra, por otra parte, que en el camino hacia la constitución del objeto mental razón y proporción desempeñan un papel importante objetos mentales precursores del objeto mental de razón y proporción. Aquí sólo señalo que un buen número de ellos tienen carácter cualitativo y que involucran comparaciones de razones como el contexto en el que se le puede dar sentido a la igualdad de razones, es decir, a la proporción. Entre ellos me parece particularmente importante lo que Freudenthal llama el objeto mental "relativamente". Este objeto mental es el que permite decir con sentido, por ejemplo, que un chocolate es más dulce que otro porque contiene —relativamente— más azúcar, y ese relativamente se refiere a un criterio de comparación que puede estar implícito o explícito —el peso, por ejemplo.

El objeto mental "relativamente" se constituye en la enseñanza gracias a

- Entender que las ordenaciones pueden relativizarse (relativamente mayor, menor, más, menos).
- Entender "relativamente" en el sentido de "en relación con…", con el criterio de comparación en el lugar de los puntos suspensivos.
- Usar con sentido "relativamente" y "en relación con".
- Completar "relativamente" y "en relación con" en un contexto.
- Conocer operativamente lo que "relativamente" y "en relación con" significan.
- Explicar lo que "relativamente" y "en relación con" significan.

3.4.4. EL ÁLGEBRA DEL CURRÍCULO DE SECUNDARIA Y EL PUNTO DE VISTA FENOMENOLÓGICO.

El álgebra moderna organiza fenómenos que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones.

Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel.

Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX en el momento en que al-Khwārizmī escribe el Libro conciso de *al-jabr* y *al-muqābala* y tomar ese acontecimiento como nacimiento del álgebra en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas. Lo que hace al-Khwārizmī, que lo separa de todos los trabajos que desde el suyo se verán como álgebra, es comenzar estableciendo "todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos" —tesoros, raíces y simples números o dirhams, en su terminología—, a continuación todas las combinaciones posibles de esos tipos —seis tipos: "tesoros más raíces igual a números", etc.— y luego un algoritmo para resolver cada uno de los tipos —hallar su tesoro o su raíz. Cada uno de los tipos es una forma canónica a la que se puede reducir cualquier problema por el intermedio de su traducción en términos de cosas, tesoros, raíces y dirhams. Lo que es nuevo en al-Khwārizmī no son pues los métodos de resolución, sino el establecimiento de un conjunto completo de formas canónicas todas ellas resolubles y la organización posterior de la aplicación a los problemas cuyas soluciones se organizan por esas formas canónicas.

El siguiente salto de nivel lo da Galois al dejar de buscar nuevas soluciones para estudiar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones. Y el resto de la historia hasta el álgebra moderna actual puede verse también como sucesivos saltos de nivel por objetivación de los medios de organización de fenómenos del nivel anterior.

Sin embargo, esta fenomenología histórica apenas es pertinente para el álgebra del currículo actual de secundaria, en el que ha desaparecido todo vestigio del álgebra moderna que se introdujo en los años setenta. Al estar considerada en su aspecto de lenguaje, la fenomenología que es pertinente desde el punto de vista didáctico resulta ser un análisis de los rasgos del lenguaje natural y los sistemas de signos de la aritmética escolar, en cuyo contexto y a partir de los cuales han de adquirir los alumnos el nuevo lenguaje del álgebra. Para realizar ese análisis Freudenthal recorre los puntos siguientes en el texto que se indica en el apéndice:

- Reglas de transformación (en el lenguaje natural).
- Lenguaje aritmético.
- Lenguaje como acción.
- Formalizar como un medio y como un objetivo.
- Construcción algorítmica de los nombres propios.
- Reglas de puntuación.
- Variables en el lenguaje vernáculo.

- Variables en el lenguaje de las matemáticas.
- El signo igual.
- Estrategias y tácticas algebraicas
    - Substitución formal.
    - El principio de permanencia algebraico.
    - Traducción algebraica.

El álgebra lineal, por su parte, está planteada como una herramienta aplicada. El punto de vista fenomenológico no consiste en este caso tampoco en buscar en la historia los fenómenos que dieron origen a lo que hoy entendemos por álgebra lineal. Lo que se trata aquí es de considerar las aplicaciones como un terreno en el que hay fenómenos que el álgebra lineal puede organizar y buscar el significado de los conceptos del álgebra lineal en ese mundo particular de fenómenos. Así, la operación de producto de matrices se puede dotar de sentido a través de su aplicación a matrices de conectividad de grafos y usarse después en otros contextos de aplicación en el plano de la expresión sin recurso al contenido.

3.4.5. Objetos geométricos. Figuras y dibujos.

El espacio como objeto mental y como concepto matemático no está en el punto de partida de la geometría, sino que es el producto de un largo proceso de elaboración. Como dice Freudenthal, los objetos geométricos, como conceptos, están en el espacio, pero los objetos mentales correspondientes a esos conceptos, están en un contexto geométrico. De donde se parte, en la historia y en la historia de cada persona no es de fenómenos —experimentables sólo en un nivel ya matematizado— que se organizan con el concepto de espacio, ni tampoco de contextos geométricos, sino es de otros fenómenos y otros contextos.

Los fenómenos organizados inicialmente son formas y configuraciones que se encuentran en un contexto visual —contornos y líneas de visión—, ligados muy pronto a la propia fabricación humana, que produce formas "geométricas". Los objetos geométricos, como conceptos, se elaboran a partir de los objetos mentales constituidos como medios de organización de las figuras "geométricas" observadas o trazadas en la tierra, para lo que sus definiciones han de desprenderse de las propiedades sensibles de esas figuras que pretenden organizar. Así Euclides se fuerza a definir, "un punto es lo que no tiene partes", "una línea es una longitud sin anchura", con propiedades que indican carencias, desprendimientos, creando un concepto que se separa del objeto mental que organiza los fenómenos correspondientes. Por ello, a partir de entonces lo que se puede hacer con las figuras o lo que se vea en ellas tendrá que ser sometido a análisis para poder aceptarse para los objetos geométricos, porque si se traza en el suelo o en un papel una circunferencia y una recta tangente a ella, en el dibujo no se cortan en un punto sino "en toda una longitud", como argumentaba Protágoras contra los matemáticos de su época, mostrando la distancia entre el concepto construido por Euclides y el objeto mental primitivo. Pero las figuras geométricas trazadas en el papel, los dibujos geométricos, se usan a su vez para representar los objetos geométricos.

Esta relación entre figura, dibujo y objeto geométrico está presente en la constitución de los objetos mentales correspondientes y en la ulterior adquisición de los conceptos. Un buen objeto mental tendrá que llevar incorporado el análisis de la figura en sus elementos y las relaciones entre ellos.

Además, las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico son más complejas porque el paso del dibujo al objeto geométrico es el resultado de una interpretación por un sujeto humano. De ello se deduce que un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por su lector como algo que le remita a un objeto geométrico, y, por otra parte, que las interpretaciones de un mismo dibujo en tanto que signo o, mejor dicho, expresión de la que un objeto geométrico es el contenido son múltiples por dos razones: la primera consiste en que las interpretaciones dependen del lector y de sus conocimientos así como del contexto; la segunda tiene que ver con la naturaleza misma del dibujo, que por sí solo no puede caracterizar un objeto geométrico. Un dibujo remite a los objetos teóricos de la geometría en la medida en que el que lo lee decide hacerlo: la interpretación evidentemente depende de la teoría con la que el lector elige leer el dibujo, así como de los conocimientos de dicho lector. El contexto desempeña un papel fundamental en la elección del tipo de interpretación. Para el aprendizaje de la geometría hay que situar pues los dibujos en contextos geométricos. Además, estas relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico no pueden ser aprendidas si no media su enseñanza.

Una manera de abordar este asunto es la propuesta por Colette Laborde[*] en el contexto del Cabri-geómetra. En esa propuesta se plantea a los alumnos las dos caras de la relación entre los dibujos y los objetos geométricos:

—situaciones problema que traten de dibujos, en las que la geometría sea una herramienta eficaz de modelización y de solución; por ejemplo, en las que permita hacer dibujos que satisfagan restricciones dadas, de manera menos costosa que el tanteo controlado por la percepción y que la geometría garantice la corrección del resultado: por ejemplo, la geometría nos asegura la tangencia de una recta a un círculo cuando es perpendicular al radio.

—situaciones en geometría en las que el recurso al dibujo y la experimentación con él eviten perderse en soluciones teóricas demasiado largas.

Por otro lado, la consideración de un entorno informático como es el Cabri-geómetra modifica las relaciones entre dibujo y objeto geométrico, cuyo análisis acabamos de esbozar. En efecto, los dibujos realizados con el Cabri en la pantalla del ordenador, los

---

[*] Véase Laborde, C. 1996. Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En Puig, L. y Calderón, J., eds. *Investigación y didáctica de las matemáticas*. Madrid: CIDE, págs. 67-85.

Cabri-dibujos, se comportan de manera diferente a los dibujos realizados con lápiz en un papel, ya que no se trazan “a mano”, sino que se definen mediante las primitivas del programa, que se corresponden siempre con propiedades geométricas. La modificación de un Cabri-dibujo por desplazamiento de alguno de sus elementos hace que no puedan mantenerse determinadas interpretaciones del dibujo fundadas en sus propiedades espaciales.

Finalmente, en la experiencia de los alumnos, el mundo de fenómenos que son organizados por los objetos geométricos que hay que abordar en la Secundaria es tan extraordinariamente rico, con sólo que se busque en la naturaleza, el arte o las construcciones humanas, que no vamos a elaborar aquí ninguna lista. Sólo señalaremos que esta abundancia de fenómenos geométricos se ha incrementado enormemente en los últimos tiempos con todos los productos infográficos: videojuegos; imágenes digitales que aparecen como carátulas de programas de televisión, videoclips, etc.; juegos de ordenador.

3.4.6. MOVIMIENTOS Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS.

Las transformaciones geométricas están relacionadas con movimientos físicos de figuras geométricas. Ahora bien, también hay una relación compleja y conflictiva entre las características o propiedades geométricas de las transformaciones geométricas y las propiedades espaciales de los movimientos. Freudenthal lo expresa mostrando tres diferencias básicas:

el movimiento	mientras que la transformación
es	es
de un objeto	*del espacio*
se realiza	se realiza
dentro del espacio	*sobre el espacio*
y sucede	y sucede
en el tiempo	*de golpe*
a lo largo de un recorrido	*sin recorrido intermedio*

Ésta es la fuente de dificultades como la de identificar como iguales todas las transformaciones cuyo resultado sea el mismo aunque el recorrido de las figuras al efectuar el movimiento correspondiente sea diferente, la de aceptar como transformación la identidad, ya *se llame* “traslación de vector 0” o “giro de centro A y ángulo 0°”, etc.

Teniendo presente esta distancia entre fenómeno y concepto matemático, también puede ser numeroso el mundo de fenómenos presentes en el entorno de los alumnos o que se les puede ofrecer para su exploración que son pertinentes para la constitución del objeto mental de transformación geométrica.

3.4.7. ESTADÍSTICA.

Los conceptos de la estadística descriptiva se han desarrollado con el fin de organizar la información que proporcionan datos numéricos. Esos datos provienen de una gran diversidad de fenómenos de la vida social, política y económica, cuya enumeración sería interminable. Ahora bien, todos esos fenómenos no son más que los contextos en los que se usan los conceptos de la estadística, y tiene interés didáctico tomarlos en consideración como contextos de uso, ya que constituyen un campo de experimentación de los sujetos en la constitución de los objetos mentales de la estadística. Los fenómenos de los que éstos realmente tratan tienen que ver con la información cuantitativa que hay en los datos y lo que los conceptos organizan es esa información cuantitativa resumiéndola, caracterizándola, tipificándola, disponiéndola de forma que pueda ser comparada con otras informaciones provenientes de datos masivos.

En la vida cotidiana de los alumnos, los conceptos estadísticos aparecen en la prensa, la televisión y otros medios de comunicación aplicados a cuestiones diversas para describirlas; en las noticias de las campañas políticas, para predecir el comportamiento de los votantes. Desde el punto de vista de la fenomenología didáctica, todos estos elementos *en los que la estadística ya está presente, en su uso civil,* forman parte también de las experiencias con que los alumnos configuran los objetos mentales correspondientes.

En el terreno de la inferencia estadística, los fenómenos son más complejos y de naturaleza más abstracta, ya que atañen a la posibilidad de obtener conocimiento a partir de la observación de los rasgos de casos. Ian Hacking ha discutido la dificultad de constitución de la inferencia estadística bajo el dominio del paradigma de la ciencia galileana, ya que ésta ha de luchar con lo que se entiende por "evidencia aceptable para establecer una verdad" en un momento histórico determinado y en unas prácticas sociales concretas. Esta dificultad sólo puede romperse con Fisher, que introduce la idea de que el rechazo de la hipótesis nula no equivale a su refutación, ya que la alternativa no es "rechazar la hipótesis nula" / "aceptar la hipótesis nula", sino "rechazar la hipótesis nula" / "equivocarse al rechazar la hipótesis nula".

3.4.8. PROBABILIDAD.

En el origen del cálculo de probabilidades como en el mundo en que viven los alumnos, están los juegos de azar, los fenómenos con varios resultados posibles de los que se desconoce cuál va a suceder, los sorteos, el tiempo atmosférico, etc. En el lenguaje oral, el término "probable" o la expresión "es probable" tanto quiere decir "puede que suceda" como "creo que va a suceder", y la desambiguación suele venir producida por el énfasis que pone el que habla; además, estos términos comparten el campo semántico con "posible" y "es posible".

Los puntos de vista logicista, subjetivista y frecuencialista, que se han propuesto para fundamentar la idea de probabilidad, muestran el rango de fenómenos subyacentes y las dificultades para delimitar los conceptos básicos de probabilidad y aleatoriedad. Unos buenos objetos mentales de lo aleatorio y la probabilidad pueden constituirse con componentes que se derivan de las estipulaciones de Kolmogorov:

La experiencia tiene más de un resultado posible.

Con los conocimientos de quien observa la experiencia, lo que sucederá es impredecible.

La experiencia puede suponerse que es reproductible en las mismas condiciones *n* veces, *n* suficientemente grande.

La secuencia de resultados obtenidos en la repetición carece de un patrón que quien observa pueda predecir.

Las fluctuaciones de las frecuencias relativas se hacen cada vez más estables cuando *n* crece y su amplitud disminuye con una cierta regularidad.

3.4.9. VARIABLE, DEPENDENCIA, FUNCIÓN.

La costumbre establecida en las matemáticas actuales de llamar "variables" a lo que en realidad son medios para formular proposiciones de carácter general —lo que Freudenthal llama "nombres polivalentes"— es reciente. "Variable" había estado significando de siempre algo que realmente varía, algo del mundo físico, social, mental, o del propio mundo de las matemáticas, que se percibe o se imagina que está variando. Así, desde los fenómenos físicos, sociales y mentales variables se pasa a números, magnitudes o puntos concebidos también como variables, esto es, a objetos matemáticos variables.

El origen fenomenológico del concepto de función está en el momento en que se enuncia, se postula, se produce o se reproduce una dependencia entre variables, que se presenta en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez están relacionadas con variables de los otros mundos.

La misma dependencia puede, a su vez, ser objetivada, esto es, se le puede dar el estatuto de objeto mental. En el camino hacia esa objetivación, la dependencia ha de ser experimentada mentalmente, usada, provocada, hecha consciente, experimentada como un objeto, nombrada como un objeto, situada en un contexto más amplio de dependencias.

Una mirada a la historia muestra que la palabra "función" no se usa de forma parecida a como lo hacemos ahora hasta Euler, pero es posible interpretar como funciones hechos tan antiguos como las descripciones mediante tablas de los movimientos de los cuerpos celestes hechas por los astrónomos desde los tiempos paleobabilónicos. Lo que la historia nos enseña para una fenomenología de las funciones puede resumirse así:

- Las funciones hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables cuya variabilidad se comparaba en términos infinitesimales.

- La libertad de cambiar las variables de dependiente a independiente y entre independientes condujo a un nuevo tipo de operación con funciones: la composición y la inversión. Es esta nueva riqueza operatoria la que ha causado el éxito del concepto de función.

- La necesidad de distinguir entre las variables dependientes e independientes condujo a poner en primer plano las funciones en vez de las relaciones. A pesar de lo que sugieren las expresiones algebraicas y analíticas, el desarrollo tendió hacia las funciones univalentes.

- Un cambio de perspectiva condujo de la descripción de datos visuales mediante funciones expresadas analíticamente a la visualización de funciones mediante gráficas.

- La función arbitraria hace su aparición con el cálculo variacional y la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta “arbitrariedad” no sólo atañe al carácter de la dependencia funcional, sino a la naturaleza de las variables, que pueden ser números, puntos, curvas, funciones, elementos de conjuntos arbitrarios.

- Las funciones del análisis, las transformaciones geométricas, las permutaciones de los conjuntos finitos, las aplicaciones entre conjuntos arbitrarios confluyen para generar el concepto general de función.

- Ese concepto se usa a su vez para organizar una gran variedad de objetos: desde las operaciones algebraicas a los predicados lógicos.

Esta riqueza final de fenómenos tan variados que se integran en el concepto general de función, fenómenos que, además, pertenecen muchos de ellos al propio mundo de las matemáticas, hace que la función como objeto mental sea mucho más compleja que el número, los objetos geométricos o incluso la razón. La adquisición del concepto de función sólo puede hacerse en etapas avanzadas de la escolaridad en que los alumnos puedan haber tenido experiencia de un buen número de esos fenómenos.

Lo que de hecho puede constituirse como objeto mental en la Educación Secundaria es la idea de variable y de dependencia funcional y es difícil tender puentes siquiera con las transformaciones geométricas, que también se están experimentando.

3.4.10. LÍMITE, CONTINUIDAD, INFINITO.

Una fenomenología de estos conceptos, que no vamos a abordar aquí, muestra el abismo enorme entre esos conceptos y los fenómenos iniciales y los primeros objetos mentales que se constituyen tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de cada persona. La frase de Cantor a Dedekind “Lo veo, pero no lo creo” a propósito de su conclusión derivada del método de la diagonal de la existencia de cardinales infinitos distintos es una muestra clara de ello. No hay de hecho nada en la experiencia física de las personas que se corresponda con los conceptos matemáticos de continuidad y, sobre todo, de infinito —que, por otra parte, no está claro que sea un único concepto. Los fenómenos para cuya organización han elaborado los matemáticos esos conceptos pertenecen al mundo de las matemáticas en el que hay objetos que los producen o se producen en contextos altamente matematizados. Una didáctica de estos conceptos también ha de tener en cuenta que sólo pueden constituirse buenos objetos mentales de ellos a condición de poder experimentar los fenómenos que organizan.

Si el análisis fenomenológico de estos conceptos muestra estas dificultades para su adquisición, eso no quiere decir que haya que abandonarlos. En el camino hacia la adquisición del concepto, lo que una didáctica ha de hacer es organizar un campo de experiencias que abarque el mayor número de fenómenos en cuestión y organizar la instrucción de modo que pueda constituirse un objeto mental con el cual se sea capaz de tratar con esos fenómenos. Además, no hay que perder de vista que muchos de los fenómenos pertinentes para la constitución de buenos objetos mentales de ellos son fenómenos de los propios medios matemáticos de organización, tomados como objeto de estudio en un nivel superior.

BIBLIOGRAFÍA

Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Kitcher, P. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York & Oxford: Oxford University Press

Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press. [Traducción castellana de Carlos Solís, *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza, 1978.]